LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. Дана окружность ω с центром O и точка P вне ее. На окружности отмечена точка B, причем O, B и P не лежат на одной прямой. Пусть C – середина OB. Около треугольника PBC построена описанная окружность.

Докажите, что независимо от выбора точки B все эти окружности проходят через одну точку, отличную от P.

2. На левой ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ отмечены точки A и B, а на правой ветви – точки C и D. Оказалось, что прямые AB и CD параллельны. Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD; точка O – начало координат.

Докажите, что у прямых OE и AB коэффициенты наклона равны по модулю, но противоположны по знаку.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2022},$$
$$n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2022},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа и $b_1, b_2, \ldots, b_{2022}$ – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа, причем

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2022},$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2022},$$
$$a_1 > b_1$$

и

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2022}.$$

4. Найдите все функции g, определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$g(x + xy) + g(y) = g(x + y) + 2yg(x) + g(xy)$$

выполняется для всех действительных значений x и y.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов