Министерство образования Республики Беларусь

LXX

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Минск 2020

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 70-й Белорусской математической олимпиады школьников.

Авторы задач

Войделевич А. С.	11.7
Воронович И. И.	11.5, 11.6, 11.8
Карпук М. В.	11.5
Палюхович А. А.	11.3
Рублёв Б. В.	11.1
Семченков А. С.	11.4
Жюри	11.1, 11.2

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и оригинальное издание подготовили: Е. А. Барабанов, А. С Войделевич, И. И. Воронович, М. В. Карпук, В. И. Каскевич, С. А. Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

11 класс

11.1. Квадрат 20×20 разрезали по линиям сетки на несколько меньших не обязательно различных квадратов. „Размером" квадрата назовём длину его стороны.

Какое наибольшее количество разных размеров квадратов разбиения могло получиться?

11.2. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке I и известна разность $\angle ABC - \angle BAC = 30°$. Прямая CI повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке C_1. Оказалось, что C_1 лежит на общей касательной описанных окружностей треугольников ABC и BCI.

Найдите углы треугольника ABC.

11.3. На гиперболе $y = \frac{1}{x}$ выбрали четыре различные точки: A, B, C и D. В треугольнике BCD отметили точку A_1 — центр окружности, проходящей через середины сторон этого треугольника. В треугольниках ACD, ABD и ABC аналогично отметили точки B_1, C_1 и D_1. Оказалось, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 различны и лежат на одной окружности.

Докажите, что центр этой окружности совпадает с началом координат.

11.4. Найдите все тройки (a, b, k), $k \geqslant 2$, натуральных чисел такие, что число $(a^k + b)(b^k + a)$ является степенью двойки.

11 класс

11.5. Все натуральные делители натурального числа n выписали в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Оказалось, что в этом ряду количество пар (d_i, d_{i+1}) соседних делителей таких, что d_i является делителем d_{i+1}, нечётно.

Докажите, что n представимо в виде pm^2, где p — наименьший простой делитель числа n, а $m \in \mathbb{N}$.

11.6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве всех действительных чисел и принимают действительные значения. Известно, что $g(x)$ принимает все действительные значения, $g(0) = 0$, а также, для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x + f(y)) = f(x) + g(y).$$

Докажите, что $g(x + y) = g(x) + g(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

11.7. Прямая AL — биссектриса в треугольнике ABC ($L \in BC$), а ω — его описанная окружность. Хорды X_1X_2 и Y_1Y_2 проходят через точку L так, что точки X_1, Y_1 и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Прямые X_1Y_2 и Y_1X_2 пересекают сторону BC в точках Z_1 и Z_2, соответственно.

Докажите, что $\angle BAZ_1 = \angle CAZ_2$.

11.8. В футбольном турнире приняли участие 10 команд: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. По окончании турнира выяснилось, что все команды набрали разное количество очков и нашлись команды, выигравшие больше матчей, чем команда-победитель турнира.

Какое наибольшее количество таких команд могло быть? (В футболе команда, выигравшая матч получает три очка, проигравшая — нуль, а в случае ничьи обе команды получают по одному очку.)

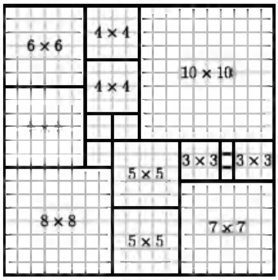
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11 класс

11.1. Ответ: 9.

Наименьшая возможная сумма квадратов десяти различных натуральных чисел равна $1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$. Следующая по возрастанию такая сумма содержит по крайней мере одно слагаемое, не меньшее 11^2, следовательно, она равна $385 - 10^2 + 11^2 = 406 > 400$. Значит, если количество разных размеров квадратов не меньше десяти, то эти размеры равны $1, 2, \ldots, 10$.

Предположим, что разбиение, в котором присутствуют все размеры от 1 до 10, существует и выделим в нём по одному квадрату размеров 6, 7, 8, 9 и 10. Рассмотрим сумму длин проекций выделенных квадратов на одну из сторон квадрата 20×20 (назовём эту сторону AB). Эта сумма равна $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40 = 2 \cdot 20$. Следовательно, по принципу Дирихле либо 1) каждый единичный отрезок этой стороны покрыт ровно двумя проекциями, либо 2) некоторый единичный отрезок этой стороны покрыт по крайней мере тремя проекциями. Второй случай, очевидно, невозможен, поскольку сумма проекций соответствующих трёх квадратов на другую сторону больше 20 и они должны пересечься.

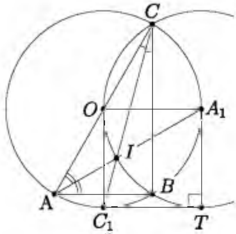


Пусть в первом случае проекции квадратов размера $a \times a$ и $b \times b$ покрывают крайний левый единичный отрезок стороны AB, а квадраты размера $c \times c$ и $d \times d$ — крайний правый. Тогда $(\max(a, b) + 1)$-ую слева клетку может покрывать только проекция оставшегося пятого выделенного квадрата — противоречие с тем, что все клетки покрыты дважды.

Таким образом, количество различных размеров не больше девяти. Пример, показывающий, что девять различных размеров могут быть, представлен на рисунке выше (на нём указаны все размеры квадратов, бóльшие 2).

11.2. Ответ: $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 60°$ и $\angle ACB = 30°$.

Решение. Точка A_1 пересечения биссектрисы AI с описанной окружностью треугольника ABC является серединой дуги BC этой окружности и, согласно лемме о трезубце, центром описанной окружности треугольника BIC. Обозначим градусные меры углов $\angle CAB$ и $\angle ABC$ через 2α и 2β, центр и радиус описанной окружности треугольника ABC — через O и R, а основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на общую касательную описанных окружностей треугольников ABC и BIC, проходящую через C_1, — через T.



Рассмотрим прямоугольную трапецию A_1TC_1O. Основание OC_1 и боковая сторона OA_1 равны R как радиусы описанной окружности треугольника ABC. Основание A_1T является радиусом описанной окружности треугольника BIC, следовательно, $A_1T = A_1B = 2R\sin\alpha$ (теорема синусов для треугольника A_1AB). В описанной окружности треугольника ABC дуга $\smile A_1C_1$ состоит из половин дуг $\smile CB$ и $\smile BA$, т. е.

$$A_1C_1 = 2R\sin(\frac{\angle BAC + \angle BCA}{2}) = 2R\cos\beta.$$

Выразим по теореме Пифагора длину высоты TC_1 трапеции A_1TC_1O двумя способами: $TC_1^2 = OA_1^2 - (A_1T - OC_1)^2 = A_1C_1^2 - A_1T^2$. Подставляя найденные значения получим равенство

$$R^2 - (R(2\sin\alpha - 1))^2 = 4R^2\cos^2\beta - 4R^2\sin^2\alpha, \quad \text{равносильное} \quad \cos^2\beta = \sin\alpha.$$

По условию $\alpha = \beta - 15°$, значит, это равенство равносильно $\cos^2\beta = \sin(\beta - 15°)$. Рассмотрим это уравнение: левая часть является убывающей функцией аргумента $\beta \in (0, 90°)$, а правая часть возрастает на этом промежутке, поскольку функция $\sin$ возрастает на $(-90°, 90°)$. Следовательно, это уравнение имеет не более одного решения на промежутке $\beta \in (0, 90°)$. С другой стороны, это уравнение имеет решение $\beta = 45°$, которое в силу вышесказанного является единственным.

Таким образом, единственное возможное значение β равно $45°$, которому соответствуют углы $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 60°$ и $\angle ACB = 30°$ треугольника ABC.

11.3. Через x_1, x_2, x_3, x_4 обозначим абсциссы точек A, B, C и D, тогда ординаты этих точек равны $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ и $\frac{1}{x_4}$. Координаты (x_1', y_1') точки A_1 находятся из системы

$$\begin{cases} (x_1' - \frac{(x_2 + x_3)}{2})^2 + (y_1' - \frac{(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3})}{2})^2 = (x_1' - \frac{(x_2 + x_4)}{2})^2 + (y_1' - \frac{(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4})}{2})^2; \\ (x_1' - \frac{(x_2 + x_3)}{2})^2 + (y_1' - \frac{(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3})}{2})^2 = (x_1' - \frac{(x_3 + x_4)}{2})^2 + (y_1' - \frac{(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4})}{2})^2. \end{cases}$$

Получаем, что $x_1' = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4 - \frac{1}{x_2x_3x_4})$ и $y_1' = \frac{1}{4}(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} - x_2x_3x_4)$. Для координат (x_2', y_2'), (x_3', y_3'), (x_4', y_4') точек B_1, C_1, D_1 верны аналогичные равенства. Пусть точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на окружности с центром $O_1(\frac{x_0}{4}, \frac{y_0}{4})$ и радиусом $\frac{R}{4}$, тогда точки с координатами $(4x_1', 4y_1')$, $(4x_2', 4y_2')$, $(4x_3', 4y_3')$ и $(4x_4', 4y_4')$ лежат на окружности с центом $O'(x_0, y_0)$ и радиусом R, причём O_1 лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $1 : 4$, считая от точки O — начала координат. Значит, верны равенства:

$$\begin{cases} R^2 = (x_0 - (x_2 + x_3 + x_4 - \frac{1}{x_2x_3x_4}))^2 + (y_0 - (\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} - x_2x_3x_4))^2; \\ R^2 = (x_0 - (x_1 + x_3 + x_4 - \frac{1}{x_1x_3x_4}))^2 + (y_0 - (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} - x_1x_3x_4))^2; \\ R^2 = (x_0 - (x_1 + x_2 + x_4 - \frac{1}{x_1x_2x_4}))^2 + (y_0 - (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4} - x_1x_2x_4))^2; \\ R^2 = (x_0 - (x_1 + x_2 + x_3 - \frac{1}{x_1x_2x_3}))^2 + (y_0 - (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - x_1x_2x_3))^2. \end{cases}$$

Эта система кратко записывается в виде

$$R^2 = ((x_0 - \sigma_1) + x_i(1 + \frac{1}{\sigma_4}))^2 + ((y_0 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}) + \frac{1}{x_i}(1 + \sigma_4))^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \qquad (1)$$

где $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$ и $\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$ — основные симметрические многочлены.

Заметим, что $x_i \neq x_j$ при всех $i \neq j$, так как точки A, B, C и D различны. Кроме того, равенство $\sigma_4 = -1$ невозможно, поскольку точки A_1, B_1, C_1 и D_1 различны. Следовательно, при решении системы (1) можно сокращать на все разности вида $x_i - x_j$, $i \neq j$, и на сумму $(1 + \sigma_4)$.

Вычитая равенства с x_i и x_j системы (1) друг из друга, после сокращения получим равенство

$$(x_i + x_j)(\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4^2}) + 2\frac{x_0 - \sigma_1}{\sigma_4} - \frac{x_i + x_j}{x_i^2 x_j^2}(1 + \sigma_4) - 2(y_0 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4})\frac{1}{x_i x_j} = 0. \qquad (2)$$

Вычитая друг из друга равенства вида (2) с парами (x_i, x_j) и (x_j, x_k), после сокращения получим равенство

$$\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4^2} + \frac{x_i x_j + x_j x_k + x_i x_k}{x_i^2 x_j^2 x_k^2}(1 + \sigma_4) + 2(y_0 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4})\frac{1}{x_i x_j x_k} = 0. \qquad (3)$$

Пусть ℓ — индекс такой, что множество $\{i, j, k, \ell\}$ совпадает с $\{1, 2, 3, 4\}$, тогда $x_i x_j x_k = \frac{\sigma_4}{x_\ell}$, $\frac{x_i x_j + x_j x_k + x_i x_k}{x_i x_j x_k} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{1}{x_\ell}$ и равенство (3) преобразовывается к виду

$$(1 + \sigma_4)(\frac{1}{\sigma_4} - 1)\frac{1}{x_\ell} + 2(y_0 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}) + \frac{\sigma_3}{\sigma_4}(1 + \sigma_4) = 0.$$

Левая часть полученного равенства является линейной функцией переменной $\frac{1}{x_\ell}$ и равна нулю в четырёх различных точках: $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ и $\frac{1}{x_4}$. Это возможно только, если её коэффициенты равны нулю.

Из равенства $(1 + \sigma_4)(\frac{1}{\sigma_4} - 1) = 0$ получаем, что $\sigma_4 = 1$. Подставляя найденное значение в $2(y_0 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}) + \frac{\sigma_3}{\sigma_4}(1 + \sigma_4) = 0$, находим, что $y_0 = 0$.

Подставляя найденные значения в равенство (2), после сокращения на 2 получим равенство

$$(x_i + x_j) + x_0 - \sigma_1 - \frac{x_i + x_j}{x_i^2 x_j^2} + \frac{\sigma_3}{x_i x_j} = 0.$$

Подставляя в него σ_1 и σ_3 в явном виде и учитывая, что $\frac{1}{x_i x_j} = x_k x_\ell$, легко находим, что $x_0 = 0$. Таким образом, точка O' совпадает с началом координат, следовательно, и точка O_1 — тоже, что и требовалось доказать.

Хотя это и не требуется в условии задачи, отметим, что, согласно (1), радиус искомой окружности равен $\frac{1}{16}(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} + x_3^2 + \frac{1}{x_3^2} + x_4^2 + \frac{1}{x_4^2})$.

Второе решение (Дубовик Е. А.). Воспользуемся двумя леммами:

Лемма 1. Окружность девяти точек треугольника, построенного на равнобокой гиперболе, проходит через ее центр.

Доказательство леммы 1. Доказательство можно, например, найти в книге[1]. Приведём кратко вычислительное доказательство. Хорошо известно и нетрудно проверить, что для произвольной тройки точек $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$ и $C(c, \frac{1}{c})$, лежащих на гиперболе $y = \frac{1}{x}$, их описанная окружность пересекает гиперболу в точке $D(\frac{1}{abc}, abc)$, а ортоцентр H этого треугольника имеет координаты $(-\frac{1}{abc}, -abc)$. Таким образом, при гомотетии с центром в H и коэффициентом $\frac{1}{2}$ описанная окружность треугольника ABC переходит в окружность девяти точек, а точка D описанной окружности переходит в середину отрезка DH — начало координат, что и означает требуемое.

Лемма 2. Если для параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ и точки O выполняется равенство $\angle A_1OA_2 + \angle A_3OA_4 = 180^0$, то $\angle OA_1A_2 = \angle A_2A_3O$.

Доказательство леммы 2. Отметим точку O' такую, что $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{A_1A_4}$. Треугольник A_3A_4O' получается из треугольника A_2A_1O параллельным переносом, следовательно, $\angle A_4O'A_3 = \angle A_1OA_2$ и четырёхугольник $OA_3O'A_4$ вписанный. Поэтому $\angle A_2A_3O = \angle A_3OO' = \angle A_3A_4O' = \angle A_2A_1O$. Лемма 2 доказана.

Пусть M, N, K и L — середины отрезков AB, BC, CD и DA соответственно, а точка O — начало координат. Согласно лемме 1, OM — общая хорда окружностей девяти точек $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$, значит, $MO \perp C_1D_1$, аналогично $NO \perp A_1D_1$, $KO \perp A_1B_1$ и $LO \perp B_1C_1$. Стороны углов $\angle LOK$ и $\angle MON$ перпендикулярны сторонам противоположных углов $A_1B_1C_1$ и, соответственно, $C_1D_1A_1$ вписанного четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, следовательно, $\angle LOK + \angle MON = 180°$.

Таким образом, точка O и параллелограмм $MNKL$ удовлетворяют условиям леммы 2. Следовательно, $\angle OLM = \angle ONM$ — равенство углов, опирающихся на общую хорду окружностей девяти точек $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$. Значит, радиусы этих окружностей равны. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что радиусы всех этих окружностей равны, что и означает равенство $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ из которого следует требуемое.

11.4. Ответ: $(5, 3, 3)$, $(3, 5, 3)$, а также, $(1, 1, k)$ при всех натуральных k.

Мы будем использовать стандартное обозначение $v_2(x)$ для степени вхождения 2 в x, т.е. $v_2(x)$ — это такое число α, что $2^\alpha \mid x$, но $2^{\alpha+1} \not| \, x$. Следующие свойства функции v_2 следуют непосредственно из определения: 1) $v_2(x) = 0$ если и только если x нечётно; 2) $x \geqslant 2^{v_2(x)}$; 3) $v_2(ab) = v_2(a) + v_2(b)$.

Пусть тройка (a, b, k) удовлетворяет условию задачи. Тогда существуют натуральные числа m и n такие, что $a^k + b = 2^m$ и $a + b^k = 2^n$. Понятно, что числа a и b имеют одинаковую чётность. Предположим, что они чётные. Пусть $a = 2^\alpha x$ и $b = 2^\beta y$, где x и y нечётны ($\alpha = v_2(a)$, $\beta = v_2(b)$). Не ограничивая общности, считаем, что $\alpha \geqslant \beta$. При этом

$$2^m = a^k + b = 2^{k\alpha}x^k + 2^\beta y = 2^\beta(2^{k\alpha-\beta}x^k + y).$$

Однако нечётное число $2^{k\alpha-\beta}x^k + y \geqslant 2x^k + y \geqslant 3$ не может быть делителем степени двойки 2^m — противоречие. Следовательно, оба числа a и b нечётны.

Нам понадобятся вспомогательные

[1]Акопян А. В., Заславский А. А.. Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн.. – М.: МЦНМО, 2011. – 148 с. – ISBN 978-5-94057-732-4.

Лемма 1. Для любых нечётного x и чётного y верно равенство

$$v_2(x^y-1)=v_2(x^2-1)+v_2(y)-1.$$

Доказательство. Пусть $y=2^t\ell$, где ℓ нечётно ($t=v_2(y)\geqslant 1$). Раскладывая $x^y-1=x^{2^t\ell}$ по формуле разности квадратов $t-1$ раз, получим

$$v_2(x^y-1)=v_2((x^{2^{t-1}\ell}+1)(x^{2^{t-2}\ell}+1)\ldots(x^{2^1\ell}+1)(x^{2^1\ell}-1))=$$
$$v_2(x^{2^{t-1}\ell}+1)+\nu_2(x^{2^{t-2}\ell}+1)+\ldots+v_2(x^{2^1\ell}+1)+v_2(x^{2^1\ell}-1).$$

Поскольку квадраты натуральных чисел дают остаток 1 при делении на 4, то при всех нечётных z выполняется равенство $v_2(z^2+1)=1$. Значит,

$$v_2(x^y-1)=1+1+\ldots+1+v_2(x^{2\ell}-1)=(v_2(y)-1)+v_2(x^{2\ell}-1). \qquad (1)$$

Разложим $x^{2\ell}-1$ по формуле разности ℓ-тых степеней:

$$x^{2\ell}-1=(x^2-1)(x^{2\ell-2}+x^{2\ell-4}+\ldots+x^2+1).$$

Заметим, что второй множитель представляет собой сумму ℓ нечётных слагаемых, т. е. он нечётен. Следовательно, $v_2(x^{2\ell}-1)=v_2(x^2-1)$, подставив это в (1), получим требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых нечётных x и y верно равенство

$$v_2(x^y+1)=v_2(x+1).$$

Доказательство. Аналогично окончанию доказательства леммы 1, разложим x^y+1 по формуле суммы степеней с показателем y:

$$x^y+1=(x+1)(x^{y-1}-x^{y-2}+\ldots-x+1).$$

Второй множитель представляет собой сумму y нечётных слагаемых, т. е. он нечётен, значит, $v_2(x^y+1)=v_2(x+1)$. Лемма доказана.

Рассмотрим вначале случай, когда одно из чисел a и b равно 1 (не ограничивая общности, пусть $b=1$). Тогда $a^k+1=2^m$ и $a+1=2^n$. Если k чётно, то $v_2(a^k+1)=1$, откуда $a=1$. Если же k нечётно, то $v_2(a^k+1)=v_2(a+1)$ по лемме 2. Учитывая, что оба эти числа — степени двойки, $a^k+1=a+1$, т. е. снова $a=1$. Очевидно, тройка $(1,1,k)$ подходит при всех k. В дальнейшем считаем, что $a,b>1$.

Не ограничивая общности, пусть $a\geqslant b$, тогда и $m\geqslant n$. Из равенства $a+b^k=2^n$ следует сравнение $a\equiv -b^k \pmod{2^n}$. Поэтому $2^m=a^k+b\equiv(-b^k)^k+b \pmod{2^n}$. Следовательно, $v_2((-b^k)^k+b)\geqslant n$.

Если k чётно, то $v_2((-b^k)^k+b)=v_2(b^{k^2}+b)=v_2(b^{k^2-1}+1)$. Так как k^2-1 нечётно, то $v_2(b^{k^2-1}+1)=v_2(b+1)$, согласно лемме 2. Значит, $v_2(b+1)\geqslant n$, откуда $b+1\geqslant 2^n=a+b^k>1+b$ — противоречие.

Пусть теперь k нечётно. Тогда $v_2((-b^k)^k+b)=v_2(b^{k^2}-b)=v_2(b^{k^2-1}-1)$. По лемме 1 это число равно $v_2(b^2-1)+v_2(k^2-1)-1$. Обозначим $v_2(k^2-1)=\ell$, при этом, неравенство $v_2((-b^k)^k+b)\geqslant n$ запишется в виде $v_2(b^2-1)\geqslant n-\ell+1$.

Одно из двух последовательных чисел $b-1$ и $b+1$ не делится на 4, значит, $v_2(b-1)$ или $v_2(b+1)$ равно 1. Тогда соответственно $v_2(b+1)$ или $v_2(b-1)$ не меньше $n-\ell$. В обоих случаях $b+1 \geqslant 2^{n-\ell}$ и уж точно $b \geqslant 2^{n-\ell-1}$. Получается, что $2^n = a+b^k > b^k \geqslant 2^{k(n-\ell-1)}$, откуда $2^{n(k-1)} < 2^{(\ell+1)k}$. Учитывая, что $2^k < b^k < a+b^k = 2^n$, из последнего неравенства следует $2^{n(k-1)} < 2^{(\ell+1)k} < 2^{(\ell+1)n}$, значит, $2^{k-1} < 2^{\ell+1}$. Так как $\ell = v_2(k^2-1)$, то $2^\ell < k^2-1$. Поэтому $2^{k-1} < 2^{\ell+1} < 2(k^2-1)$, что влечёт $2^{k-2} < k^2-1$.

Неравенство $2^{k-2} < k^2-1$ неверно при $k=8$. При бóльших значениях k оно тем более неверно, так как при увеличении k на 1, левая часть удваивается, а правая возрастает медленнее, поскольку при $k \geqslant 3$ верно неравенство $(k+1)^2-1 < 2(k^2-1)$.

Таким образом осталось рассмотреть случаи $k = 3$, 5 и 7.

Случай 1: $k=7$. В этом случае $\ell = v_2(k^2-1) = v_2(48) = 4$ и неравенство $2^{k-1} < 2^{\ell+1}$ неверно, т. к. $k-1=6$, а $\ell+1=5$.

Случай 2: $k=5$. В этом случае $\ell = v_2(k^2-1) = v_2(24) = 3$ и неравенство $2^{k-1} < 2^{\ell+1}$ неверно, так как. $k-1=4$ и $\ell+1=4$.

Случай 3: $k=3$. В этом случае $\ell = v_2(k^2-1) = v_2(8) = 3$. Подставив k и ℓ в неравенство $2^{n(k-1)} < 2^{(\ell+1)k}$ приходим к $2n < 12$, откуда $n < 6$. С другой стороны, $2^n = a+b^k \geqslant 3+3^3 = 30 > 2^4$, значит, $n=5$. Поскольку $2^5 = 32 > b^3$, то $b=3$ следовательно, $a=5$.

Непосредственна подстановка показывает, что тройки $(5,3,3)$ и $(3,5,3)$ удовлетворяют условию задачи: $(5^3+3)(3^3+5) = 2^{12}$.

11.5. Назовём пары соседних делителей из условия „дружественными". Из равенства $n = d_i d_{k+1-i}$ следует, что, если пара (d_i, d_{i+1}) дружественная, то и пара (d_{k-i}, d_{k-i+1}) — тоже. Значит, для того, чтобы количество дружественных пар было нечётно, для некоторого номера i пары (d_i, d_{i+1}) и (d_{k-i}, d_{k-i+1}) должны совпадать. Это означает, что $i = k-i$ и $n = d_i d_{i+1}$. Если число d_{i+1}/d_i составное, то для любого его простого делителя q у числа n есть делитель qd_i, находящийся между d_i и d_{i+1}, что неверно. Следовательно, $n = d_i d_{i+1} = d_i \cdot pd_i = p(d_i)^2$, где p — простое число.

Покажем теперь, что p — наименьший простой делитель числа n. Если это не так, то в разложении числа $d_i = p^a p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ на простые множители (где a — неотрицательное целое, а все α_i — натуральные числа) встречается меньшее простое число, так как каждый простой делитель числа n либо равен p, либо делит d_i. Не ограничивая общности, пусть $p_1 < p$. Тогда у числа $n = pd_k^2 = p^{2a+1} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_s^{2\alpha_s}$ между делителями d_i и $d_{i+1} = pd_i$ находится ещё один делитель — $p_1 d_i$, что невозможно. Следовательно p — наименьший простой делитель числа n.

11.6. Подставив $x=0$, получаем

$$f\big(f(y)\big) = f(0) + g(y).$$

Следовательно, функция $f(x)$ принимает все действительные значения. Подставим $g(y) = f(f(y)) - f(0)$ в равенство из условия задачи:

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f\big(f(y)\big) - f(0).$$

Так как $f(y)$ пробегает все действительные значения, то заменим $f(y)$ на y:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

Наконец, используя равенство $g(x) = f\big(f(x)\big) - f(0)$, получаем

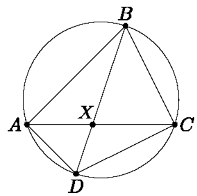
$$g(x+y) = f\big(f(x+y)\big) - f(0) = f\big(f(x) + f(y) - f(0)\big) - f(0) =$$
$$= f\big(f(x)\big) + f\big(f(y)\big) + f\big(-f(0)\big) - 3f(0) = g(x) + g(y) + c,$$

где постоянная $c = f\big(-f(0)\big) - f(0)$ не зависит от x и y. Согласно условию задачи $g(0) = 0$. Следовательно, при $x = y = 0$ верно $c = g(0+0) - g(0) - g(0) = 0$, а значит, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

11.7. Докажем два вспомогательных утверждения

Лемма 1. *Если диагонали AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, то*

$$\frac{AX}{XC} = \frac{BA \cdot DA}{BC \cdot DC}.$$



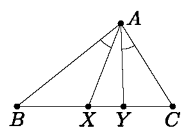
Через S_{BXA} и S_{BXC} обозначим площади треугольников BXA и BXC, соответственно. Используя две известные формулы вычисления площади треугольника, получаем, что $S_{BXA} : S_{BXC} = AX : XC$ и

$$S_{BXA} : S_{BXC} = \frac{BA \cdot BX \sin\angle XBA}{BC \cdot BX \sin\angle XBC} = \frac{BA \cdot DA}{BC \cdot DC}.$$

Лемма доказана.

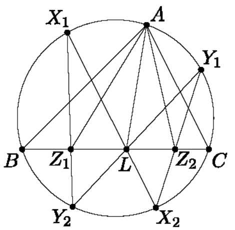
Лемма 2. *На стороне BC треугольника ABC выбраны точки X и Y. Тогда $\angle BAX = \angle CAY$, если и только если*

$$\frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



Пусть $\angle BAX = \angle CAY$. Имеем $BX : CX = S_{ABX} : S_{ACX} = \dfrac{AB\sin\angle BAX}{AC\sin\angle CAX}$ и $BY : CY = S_{ABY} : S_{ACY} = \dfrac{AB\sin\angle BAY}{AC\sin\angle CAY}$, а значит, $\dfrac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Пусть $\dfrac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Выберем на стороне BC точку Z, такую что $\angle BAX = \angle CAZ$. Тогда $\dfrac{BX \cdot BZ}{CX \cdot CZ} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, а значит, $Y \equiv Z$ и $\angle BAX = \angle CAY$. Лемма доказана.



Перейдём к доказательству утверждения задачи. Согласно лемме 1 справедливы равенства

$$\frac{BZ_1}{CZ_1}=\frac{X_1B\cdot Y_2B}{X_1C\cdot Y_2C},\quad \frac{BZ_2}{CZ_2}=\frac{Y_1B\cdot X_2B}{Y_1C\cdot X_2C},$$
$$\frac{BL}{LC}=\frac{X_1B\cdot X_2B}{X_1C\cdot X_2C}=\frac{Y_1B\cdot Y_2B}{Y_1C\cdot Y_2C}.$$

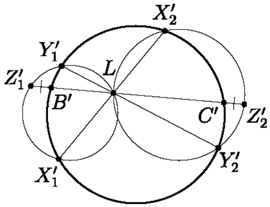
Следовательно, $\dfrac{BZ_1\cdot BZ_2}{CZ_1\cdot CZ_2}=\dfrac{BL^2}{LC^2}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$. В силу леммы 2 верно равенство $\angle BAZ_1=\angle CAZ_2$.

Второе решение. Сделаем инверсию с центром в точке L и радиусом 1. Образы объектов при инверсии будем обозначать штрихом около их имён, если для них не будет введено специальных обозначений.

Равенство углов $\angle BAL=\angle CAL$ влечёт равенство $\angle LB'A'=\angle LC'A'$, причём точки B', L и C' лежат на одной прямой — образе прямой BC, проходившей через центр инверсии. Значит, точка A' равноудалена от точек B' и C'. Прямые X_1Y_2 и Y_1X_2 не проходят через центр L инверсии, следовательно, их образами будут окружности (назовём их ω_1 и ω_2), проходящие через L. Образы Z_1' и Z_2' являются точками пересечения ω_1 и ω_2 с прямой $B'C'$, отличными от L. Прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 проходили через L, поэтому, их образы — прямые $X_1'X_2'$ и $Y_1'Y_2'$, проходящие через L. Наконец, описанная окружность треугольника ABC не проходила через L и её образ — окружность, Ω на которой лежат точки X_1', Y_1', X_2' и Y_2'.

Требуемое равенство $\angle LAZ_1=\angle LAZ_2$ равносильно $\angle LZ_1'A'=\angle LZ_2'A'$, т.е. равенству $B'Z_1'=C'Z_2'$. Сформулируем его в виде отдельного утверждения:

Утверждение.[2] Окружности ω_1 и ω_2 пересекают третью окружность Ω в точках X_1', Y_1', X_2' и Y_2' так, что хорды $X_1'X_2'$ и $Y_1'Y_2'$ пересекаются в точке L, лежащей на ω_1 и ω_2. Прямая, проходящая через L пересекает ω_1 и ω_2 в точках Z_1' и Z_2', отличных от L, а окружность Ω — в точках B' и C'. Тогда выполнено равенство $B'Z_1'=C'Z_2'$.



Доказательство. Простой подсчёт углов показывает, что $\angle Z_1'X_1'B'=\angle Y_1'Y_2'C'$, $\angle X_1'X_2'B'=\angle Z_2'Y_1'C'$ и $\angle X_1'Z_1'B'=\angle Y_2'Z_2'C'$. Из теорем синусов для треугольников $Z_1'X_1'B'$ и $Z_2'Y_1'C'$ получаем равенства:

$$B'Z_1'=\frac{\sin Z_1'X_1'B'}{\sin X_1'Z_1'B'}X_1'B'=\frac{\sin Z_1'X_1'B'\cdot\sin X_1'X_2'B'}{\sin Y_1'Z_2'C'}2R=$$
$$=\frac{\sin Y_1'Y_2'C'\cdot\sin Z_2'Y_1'C'}{\sin Y_1'Z_2'C'}2R=\frac{\sin Z_2'Y_1'C'}{\sin Y_1'Z_2'C'}Y_1'C'=C'Z_2',$$

где R — радиус окружности Ω. Требуемое равенство установлено.

[2] Акопян А. В. Геометрия в картинках. – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2017. – 236 с. – ISBN 978-5-600-02023-8. (рисунок 5.6.6)

11.8. Ответ: 2 команды.

Обозначим через x количество матчей, выигранных командой-победителем. Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Верно неравенство $x \geqslant 3$ матчей.

Доказательство. Для каждого k от 1 до 10 через S_k обозначим количество очков, набранное командой, занявшей k-ое место. Тогда $S_1 \leqslant 3x+(9-x) = 2x+9$, поскольку, помимо x побед, команда-победитель могла сыграть вничью не более, чем $9-x$ оставшихся матчей.

Так как все команды набрали различное количество очков, то выполняются неравенства $S_2 \leqslant 2x+8$, $S_3 \leqslant 2x+7$, …, $S_{10} \leqslant 2x$. Значит, суммарное количество S очков, набранных всеми командами, не превышает число $2x+9+2x+8+\ldots+2x = 20x+45$. С другой стороны, S не меньше удвоенного количества всех матчей турнира, так как в каждой игре разыгрываются 2 или 3 очка. Таким образом, $20x+45 \geqslant 2\cdot 45$, откуда следует, что $x \geqslant \frac{9}{4}$, т. е. $x \geqslant 3$.

Лемма 2. Если команда, выигравшая матчей больше, чем команда-победитель, заняла место с номером k, то $k \leqslant 7-x$.

Доказательство. Из доказательства леммы 1 следует, что $S_k \leqslant 2x+(10-k)$. С другой стороны, $S_k \geqslant 3(x+1)$, т. к. эта команда выиграла не меньше $x+1$ матчей. Значит, $2x+(10-k) \geqslant 3x+3$, что равносильно требуемому неравенству $k \leqslant 7-x$.

Из лемм 1 и 2 следует, что каждая команда, выигравшая матчей больше, чем команда-победитель, заняла место, не ниже четвёртого, значит, таких команд было не больше трёх.

Предположим, что их было три, тогда $x = 3$ и они заняли места со второго по четвёртое. Тогда в турнире состоялось как минимум $3+4+4+4 = 15$ побед. Поскольку в каждом из 45 матчей разыгрывались 2 очка в случае ничьи и 3 очка, если одна из команд выиграла, то общее количество очков равно сумме удвоенного количества игр и количества игр, закончившихся победой одной из команд. Значит, верно неравенство $S \geqslant 2\cdot 45+15 = 105$. С другой стороны, из доказательства леммы 1 следует, что $S \leqslant 20x+45 = 105$. Т. е. двойное неравенство $105 \geqslant S \leqslant 105$ является равенством и команды, занявшие места с первого по четвёртое одержали все 15 побед в этом чемпионате. Но команда, занявшая пятое место не могла набрать положенные ей 11 очков, не одержав победы. Следовательно, не могло быть трёх команд, выигравших больше матчей, чем команда-победитель.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1		3	3	1	1	1	1	1	3	3	17
2	0		0	0	1	3	3	3	3	3	16
3	0	3		0	0	0	3	3	3	3	15
4	1	3	3		1	1	1	1	0	1	12
5	1	1	3	1		1	1	1	1	1	11
6	1	0	3	1	1		1	1	1	1	10
7	1	0	0	1	1	1		3	1	1	9
8	1	0	0	1	1	1	0		3	1	8
9	0	0	0	3	1	1	1	0		1	7
10	0	0	0	1	1	1	1	1	1		6

Пример, приведённый в виде таблицы показывает, что команд, удовлетворяющих условию, могло быть две (вторая и третья команды выиграли больше матчей, чем первая).