1. Даны $n \geqslant 2$ различных целых чисел, бо́льших $-a$, где a — натуральное число. Оказалось, что среди них количество нечётных чисел равно наибольшему чётному числу, а количество чётных — наибольшему нечётному числу.

а) Найдите наименьшее возможное значение n при всех a.

б) Для каждого $a \geqslant 2$ найдите наибольшее возможное значение n.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках X и Y. Через точку Y проведены две прямые, одна из которых повторно пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно, а другая — в точках C и D соответственно. Прямая AD повторно пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $YP = YQ$.

Докажите, что описанные окружности треугольников BCY и PQY касаются друг друга.

3. Найдите все натуральные числа a, для которых найдётся многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий равенствам

$$p(\sqrt{2}+1) = 2-\sqrt{2} \quad \text{и} \quad p(\sqrt{2}+2) = a.$$

4. Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ натуральных чисел. Для каждого ℓ от 1 до $n-1$ нашли следующие наборы:

$$(\text{НОД}(a_1, a_{1+\ell}),\ \text{НОД}(a_2, a_{2+\ell}),\ \ldots\ ,\ \text{НОД}(a_n, a_{n+\ell}))\,,$$

где все индексы берутся по модулю n, т. е. если $s > n$, то $a_s = a_{s-n}$. Оказалось, что все найденные наборы состоят из одних и тех же n попарно различных чисел и различаются, возможно, порядком их следования.

Выясните, может ли n быть равно **а)** 21; **б)** 2021.